



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΜΜΥ. ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Εργασία 1

Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - Μέθοδος Ελαχίστων
Τετραγώνων

Συντάκτης:
Χρήστος Χουτουρίδης [8997]
cchoutou@ece.auth.gr

Διδάσκοντες:
Γ. Ροβιθάκης
rovithak@auth.gr

Λ. Μπίκας
lnmpikas@ece.auth.gr

31 Μαρτίου 2025

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη ενός απλοποιημένου δυναμικού συστήματος — συγκεκριμένα ενός γραμμικοποιημένου εκκρεμούς με ροπή εισόδου — με σκοπό την κατανόηση της συμπεριφοράς του και την εκτίμηση των φυσικών παραμέτρων του μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Στο πρώτο μέρος της εργασίας εξετάζεται η δυναμική του συστήματος, η οποία περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, και προσεγγίζεται τόσο θεωρητικά όσο και αριθμητικά μέσω προσομοίωσης στο περιβάλλον MATLAB. Αρχικά, το σύστημα αναδιατυπώνεται σε μορφή κατάστασης ώστε να καταστεί κατάλληλο για ανάλυση και προσομοίωση. Στη συνέχεια, εφαρμόζεται ημιτονική διέγερση και εξετάζεται η απόκριση του συστήματος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο το σύστημα φτάνει στη μόνιμη περιοδική του συμπεριφορά, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο αποκλίνουν οι ταλαντώσεις από τη μεταβατική φάση. Η ανάλυση αυτή θέτει τη βάση για τα επόμενα μέρη της εργασίας, όπου επιχειρείται η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου με τη χρήση δεδομένων εξόδου του συστήματος.

1.1. Παραδοτέα

Τα παραδοτέα της εργασίας αποτελούνται από:

- Την παρούσα αναφορά.
- Τον κατάλογο **scripts/**, που περιέχει τον κώδικα της MATLAB.
- Το [σύνδεσμο](#) με το αποθετήριο που περιέχει όλο το project με τον κώδικα της MATLAB, της αναφοράς και τα παραδοτέα.

2. ΘΕΜΑ 1 – ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ

Το σύστημα που μελετάται περιγράφεται από τη γραμμικοποιημένη διαφορική εξίσωση:

$$mL^2\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) = u(t)$$

όπου $q(t)$ είναι η γωνία του εκκρεμούς, $u(t)$ η ροπή εισόδου, και m , L , c , g φυσικές σταθερές του συστήματος.

Ορίζοντας ως διάνυσμα κατάστασης:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$$

οι εξισώσεις κατάστασης γράφονται ως:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος προκύπτει από την αρχική εξίσωση ως:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{1}{mL^2s^2 + cs + mgL}.$$

Για την προσομοίωση χρησιμοποιήθηκε ημιτονική είσοδος $u(t) = A_0 \sin(\omega t)$, με $A_0 = 4$ και $\omega = 2$. Οι υπόλοιπες παράμετροι ήταν $m = 0.75$, $L = 1.25$, $c = 0.15$, $g = 9.81$. Ο αρχικός χρόνος προσομοίωσης ορίστηκε σε 20 δευτερόλεπτα, όπως ζητείται στην εκφώνηση.

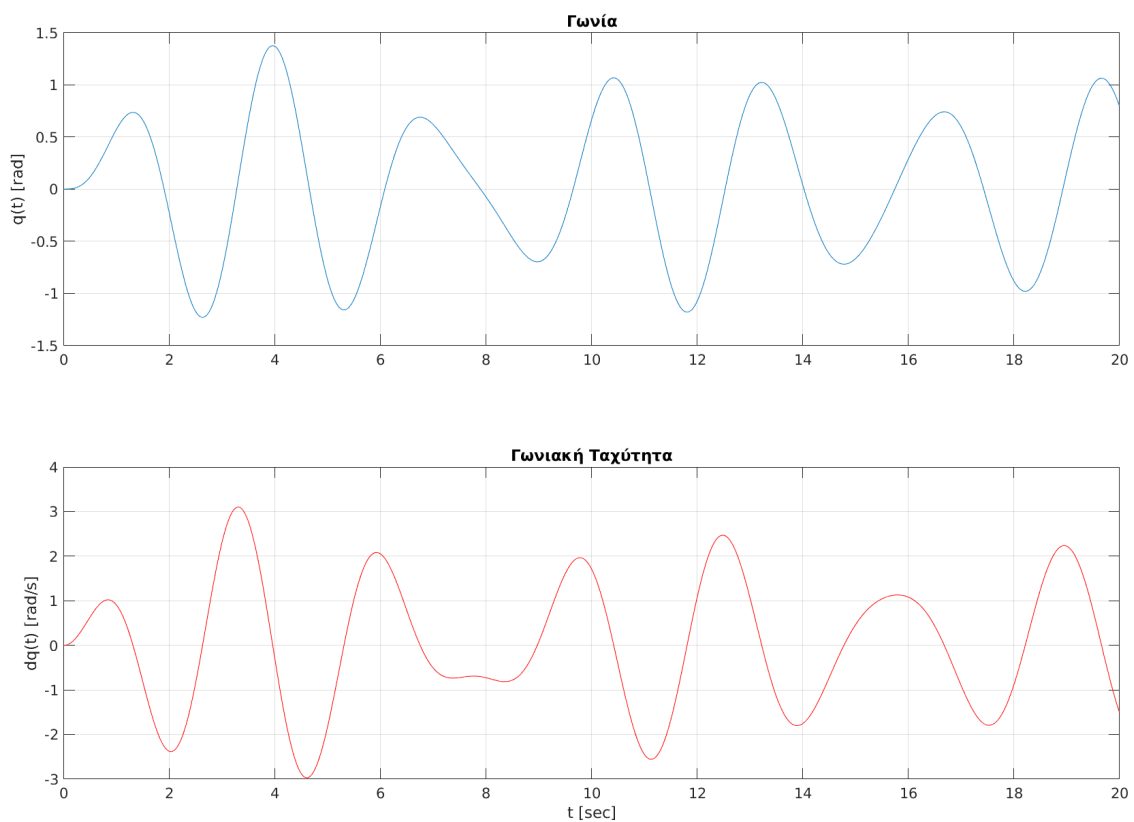
Παρατήρηση Συμπεριφοράς Συστήματος

Το σύστημα παρουσίασε περιοδική απόκριση, η οποία όμως δεν σταθεροποιήθηκε γρήγορα. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, το πλάτος των ταλαντώσεων συνεχίζει να μεταβάλλεται ακόμη και μετά από 20 δευτερόλεπτα, γεγονός που δείχνει ότι το σύστημα βρίσκεται ακόμη σε μεταβατική κατάσταση.

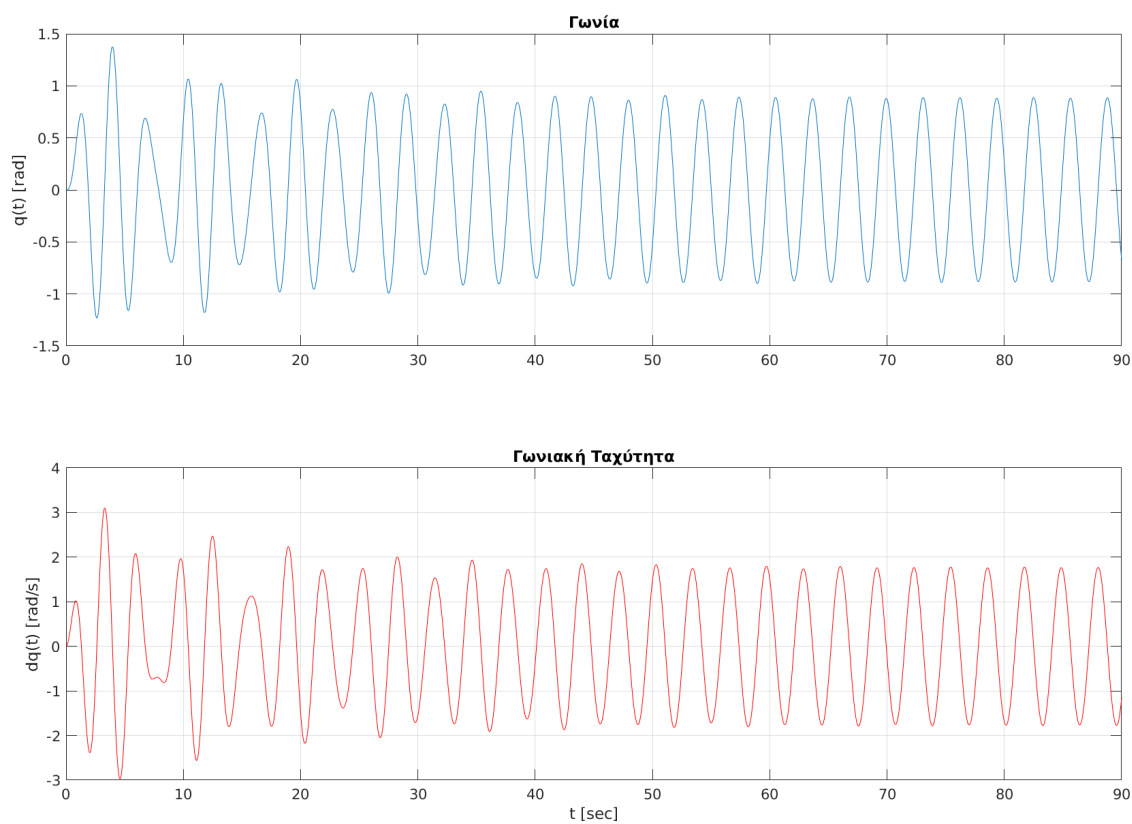
Η καθυστερημένη σύγκλιση οφείλεται κυρίως:

- στην πολύ μικρή τιμή του συντελεστή απόσβεσης ($c = 0.15$), και
- στο γεγονός ότι η συχνότητα της εισόδου ($\omega = 2 \text{ rad/s}$) είναι κοντά στη φυσική συχνότητα του εκκρεμούς ($\omega_n = \sqrt{g/L} \approx 2.8 \text{ rad/s}$), προκαλώντας φαινόμενο ενίσχυσης (quasi-resonance).

Για τον λόγο αυτό, επεκτείναμε τη διάρκεια προσομοίωσης στα 90 δευτερόλεπτα. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, το σύστημα σταθεροποιείται τελικά σε περιοδική μορφή περίπου μετά από 50 δευτερόλεπτα.



Σχήμα 1: Απόκριση του συστήματος για $t \in [0, 20]$ sec. Η μεταβατική φάση παραμένει ενεργή.



Σχήμα 2: Απόκριση του συστήματος για $t \in [0, 90]$ sec. Το σύστημα σταθεροποιείται σε περιοδική συμπεριφορά μετά τα 50 sec.